Αυτόνομες Εξισώσεις

Ορισμός:

Αυτόνομη εξίσωση ή σύστημα λέγεται η εξίσωση στην οποία η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν εμφανίζεται σε κανέναν όρο.

π.χ.

- Η εξίσωση της απλής αρμονικής ταλάντωσης $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ είναι αυτόνομη ενώ η $\ddot{x}+\omega^2 x=f_0\sin(t)$ δεν είναι

Εστιάζουμε στις εξισώσεις τύπου $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)$ όπως προκύπτουν από το νόμο του Νεύτωνα και ειδικότερα στις $\ddot{x}=f(x,\dot{x})$ για τις οποίες τα σημεία/λύσεις

- ισορροπίας είναι $f(x,0)=0$

π.χ.

Η εξίσωση $\ddot{x}=(1-x^2)+x\dot{x}$ έχει δύο σημεία ισορροπίας τα $1-x^2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

και θέτω $y=\dot{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=(1-x^2)+yx \end{cases}$

Τότε:

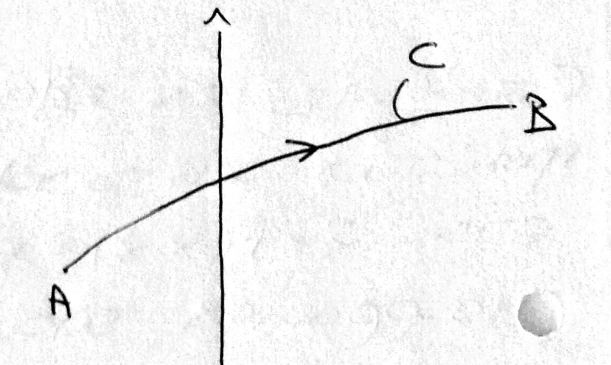
$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)y - x}{y}$ της οποίας οι λύσεις αντιστοιχούν στο χώρο της φάσεως.

Παρατηρήσεις

① Τα σημεία ισορροπίας στον φασικό χώρο βρίσκονται πάντοτε στον οριζόντιο άξονα

② Οι κλειστές καμπύλες στα φασικά διαγράμματα αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις και τα σημεία ισορροπίας που περιβάλλονται από κλειστές καμπύλες είναι ευσταθή.

Χρόνος μετάβασης:



Βρισκόμαστε στο χώρο της φάσεως και θέλουμε να μεταβούμε από το σημείο A στο B. Ορίζουμε το χρόνο μετάβασης

$$T_{AB} = \int_C dt = \int_C \frac{\dot{x}}{\dot{x}}\, dt = \int_C \frac{\dot{x}\, dt}{\dot{x}} = \int_C \frac{dx}{y}$$

Παράδειγμα

Οι εξισώσεις $\begin{cases} \ddot{x}+\omega^2 x=0 \\ \ddot{x}-\omega^2 x=0 \end{cases}$

Η εξίσωση $\ddot{x}+\omega^2 x=0$, αντιστοιχεί σε τροχιές με φασικό χώρο ελλείψεις της μορφής $(\dot{x})^2+\omega^2 x^2=C$

Για την εξίσωση $\ddot{x}=\omega^2 x$

$$\dot{x}=y \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=\omega^2 x \end{cases}$$

Το σταθερό σημείο είναι το $x=y=0$

Άρα $\frac{dy}{dx}=\frac{\omega^2 x}{y} \Rightarrow y\,dy=\omega^2 x\,dx \Rightarrow$

$$y\,dy-\omega^2 x\,dx=0 \Rightarrow \frac{y^2}{2}-\omega^2\frac{x^2}{2}=E$$

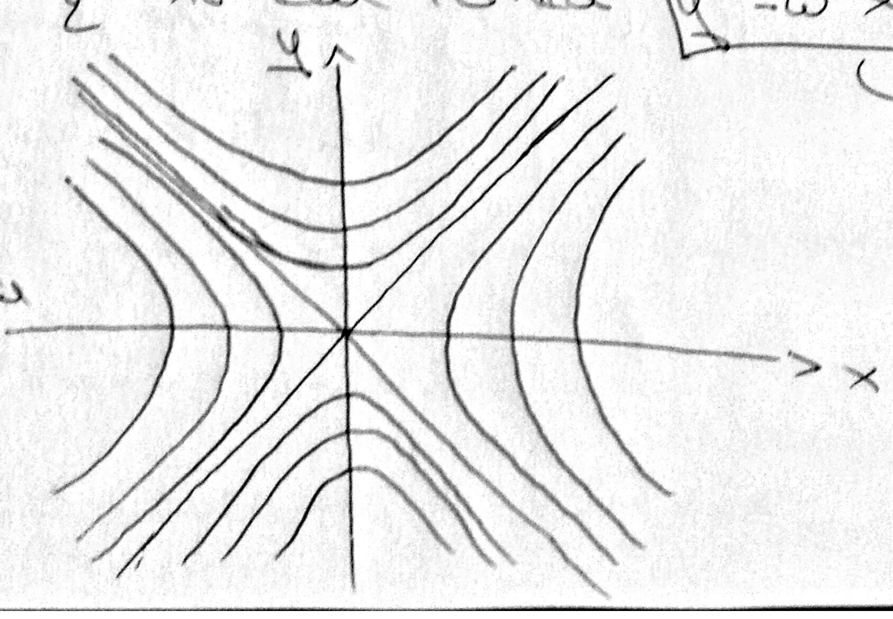
Αν για $t=0$, $y=v_0=(\dot{x}(0))$

$x=x_0$

$E=\frac{1}{2}v_0^2-\frac{1}{2}\omega^2 x_0^2$ και τελικά $\boxed{y^2-\omega^2 x^2=2E}$

↳ υπερβολές

φασικό διάγραμμα



Παρατήρηση

Το φασικό διάγραμμα είναι θεμελιωδώς διαφορετικό από αυτό της αρμονικής ταλάντωσης. Το σημείο $(x,y)=(0,0)$ (σημείο ισορροπίας) είναι ασταθές γιατί όλες οι φασικές γραμμές απομακρύνονται από αυτό. Καμία από τις φασικές γραμμές εκτός από τις ασύμπτωτες δεν περνά από το σημείο $(0,0)$, δηλαδή το υλικό σημείο με αρχική ταχύτητα v_0 και αρχική θέση x_0 δεν έχει ποτέ (σε καμία άλλη χρονική στιγμή) την ίδια θέση και την ίδια ταχύτητα.

Άσκηση

Ν.δ.ο. ο φασικός χώρος της εξίσωσης $\ddot{x}-\omega^2 x=0$ είναι υπερβολές λύνοντας την εξίσωση.

Παρατηρούμε όμως ότι και πάλι υπάρχει μία ποσότητα η οποία διατηρείται στο χρόνο. Η ποσότητα $(\dot{x})^2-\omega^2x^2=2E$ παραμένει αναλλοίωτη στο χρόνο έστω και αν το υλικό σημείο δεν εκτελεί ταλάντωση.

Διατηρήσιμα συστήματα (conservative systems)

Έχουμε ήδη συνδέσει την εξίσωση του Νεύτωνα με τη διατήρηση της ενέργειας και μάλιστα τα δύο είναι ισοδύναμα. Προκύπτουν όμως από αυτή την ισοδυναμία δύο ερωτήσεις:

1) Μπορεί να μελετήσω την κίνηση ενός υλικού σημείου από την ενέργεια του και πώς;

2) Σε ποια φυσική έννοια αντιστοιχούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος σε αυτή την περιγραφή;

Θεωρώ τη διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{1}{2} m(x)(\dot{x})^2 + V(x) = E$$

και θεωρώ επίσης ότι η μάζα μεταβάλλεται ως $m = m(x)$.

Αν η E είναι σταθερή τότε προφανώς το σύστημα διατηρεί την ενέργειά του.

Σε ποιο τύπο κίνησης αντιστοιχεί αυτή η ενέργεια? (ολοκλήρωμα κίνησης)

Παραγωγίζω την εξίσωση:

$$\frac{1}{2} m' \cancel{\dot{x}} (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m \, 2 \cancel{\dot{x}} \ddot{x} + V' \cancel{\dot{x}} = 0 \text{ , όπου } m' = \frac{dm}{dx}, \; V' = \frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m' (\dot{x})^2 + m \ddot{x} + V'(x) = 0$$

<u>Θέτω</u>: $\frac{du}{dx} = \sqrt{m(x)} \Leftrightarrow u = \int \sqrt{m(x)} \, dx$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u'\dot{x} = \sqrt{m}\,\dot{x}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx}\frac{dx}{dt} = m'\dot{x}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\frac{dm}{dt}}{2\sqrt{m}}\dot{x} + \sqrt{m}\,\ddot{x} = \frac{m'}{2\sqrt{m}}(\dot{x})^2 + \sqrt{m}\,\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{m}}\left[\frac{1}{2}m'(\dot{x})^2 + m\ddot{x}\right]$$

<u>Οπότε έχουμε:</u>

$$\frac{1}{2}m'(\dot{x})^2 + m\ddot{x} + V'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{m}\,\ddot{u} + \underbrace{V'(x)}_{\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{du}\frac{du}{dx} = \sqrt{m}\frac{dV}{du}} = 0$$

$\Rightarrow$ <u>Δηλαδή:</u> $\sqrt{m}\,\ddot{u} + \sqrt{m}\,V'(u) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{u} + V'(u) = 0}$$

Θέτω $f(u) = -\frac{dV}{du}$ και άρα $\boxed{\ddot{u} = f(u)}$ νόμος του Newton

Αν $\ddot{u} + V'(u) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(\dot{u})^2 + V(u) = E$ σταθερή και συνεπώς η μορφή του μπορεί να έχει ένα διατηρούμενο ποσότητα είναι $\ddot{x} = f(x)$

Συνοψίζοντας:

$$V(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{ή} \quad f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

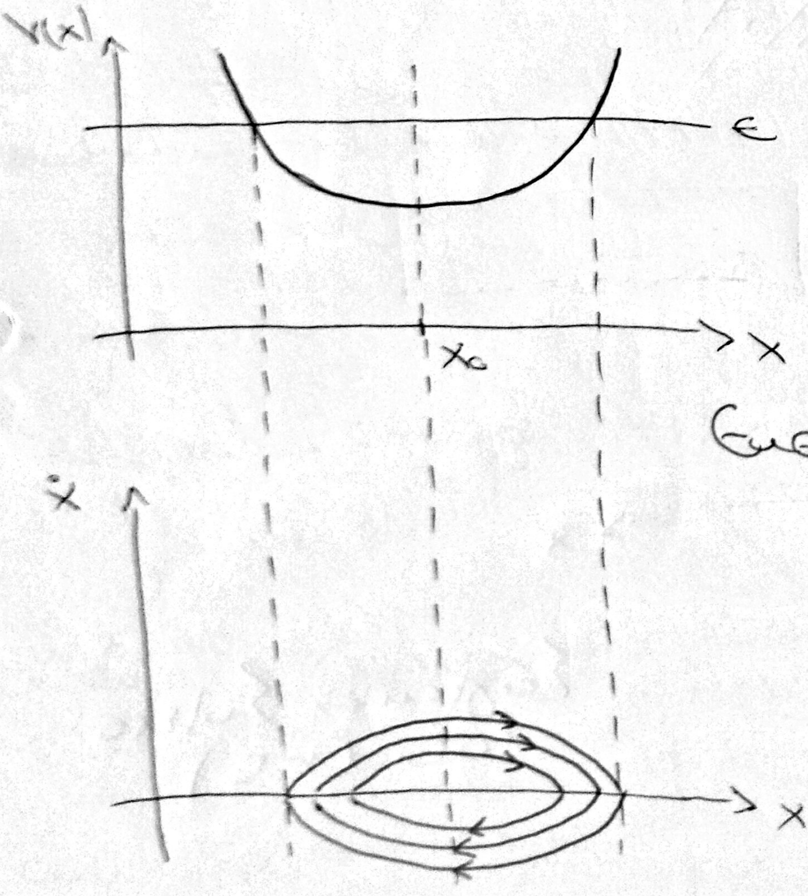
Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις:

$$f(x) = -\frac{dV}{dx} = 0$$

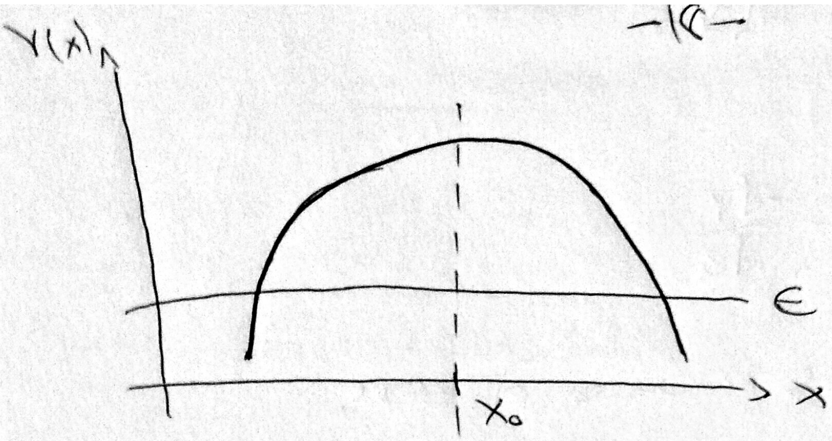
Τα διαγράμματα φάσης κατασκευάζονται από την

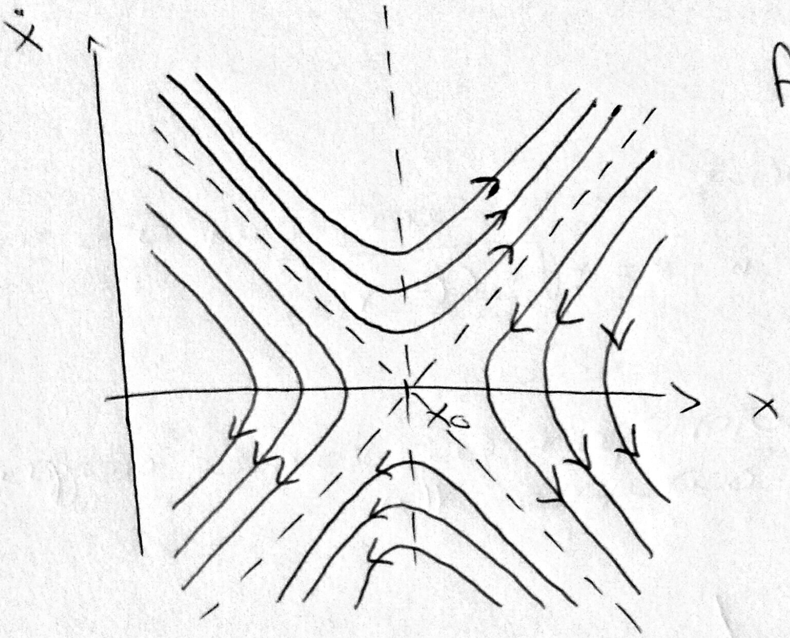
$$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + V(x) = E \quad \text{ή} \quad \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$$

και σύμφωνα με αυτό τρόπο συνδέονται διαγράμματα φάσης και δυναμικό $V(x)$.

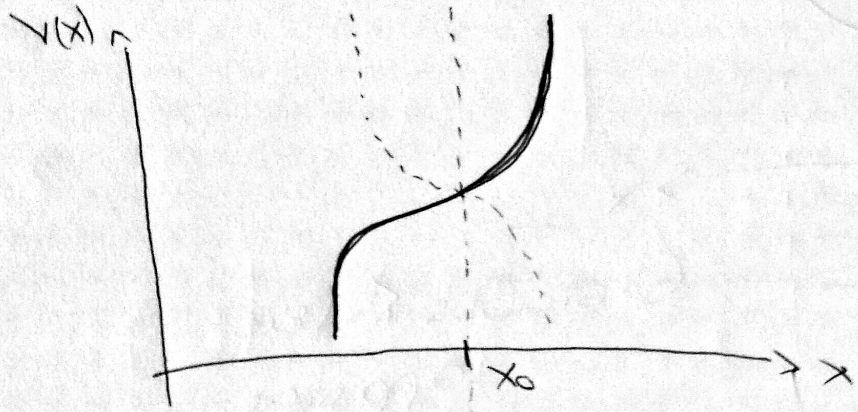


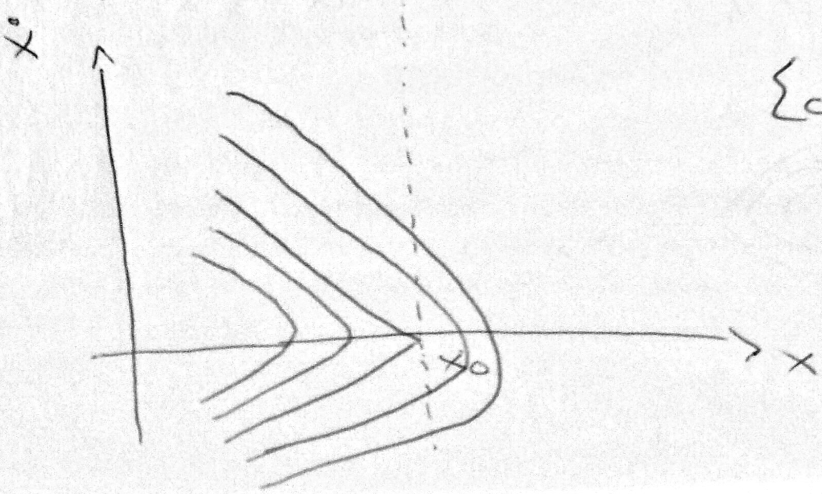
Ευσταθές Σημείο Ισορροπίας





Ασταθές Σημείο
Ισορροπίας





Σαγματικό Σημείο
(ασταθές)

Διαγράμματα φάσεων και λύσεις

Υποθέτουμε ότι $\ddot{x}=f(x)$ αντιστοιχεί στο 2ο νόμο του Νεύτωνα με $f(x)$ το σύνολο των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα. Τότε:

(1) Αν η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο από θετικό σε αρνητικό περνώντας από το σημείο ισορροπίας το σύστημα είναι ευσταθές και το σύστημα εκτελεί ταλάντωση.

(2) Αν η $f(x)$ αλλάζει πρόσημο από αρνητικό σε θετικό, το σημείο είναι ασταθές.

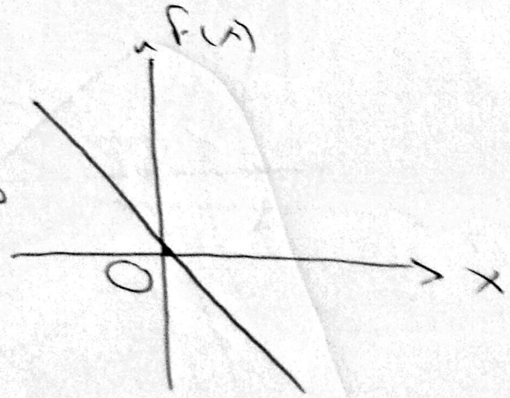
Παράδειγμα:

$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \Rightarrow \ddot{x}=-\omega^2 x = f(x)$

Το σημείο ισορροπίας είναι $x=0$

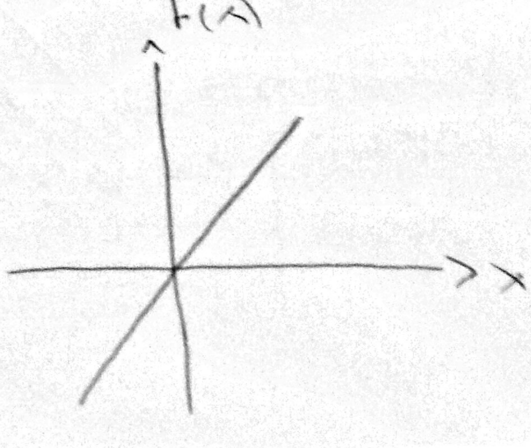
$f(x)=-\omega^2 x$

- ευσταθές σημείο



ανάποδα $f(x)=\omega^2 x$

ασταθές σημείο



Παράδειγμα:

$\ddot{x} = x^3 - x$ ← πολλαπλασιάζω με $\dot{x}$ και ολοκληρώνω:

$$\frac{(\dot{x})^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + E \Rightarrow \boxed{(\dot{x})^2 + \left(x^2 - \frac{x^4}{2}\right) = 2E}$$

$$V(x) = -\int f(x)\,dx = \int (x - x^3)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$$

Σημεία ισορροπίας:

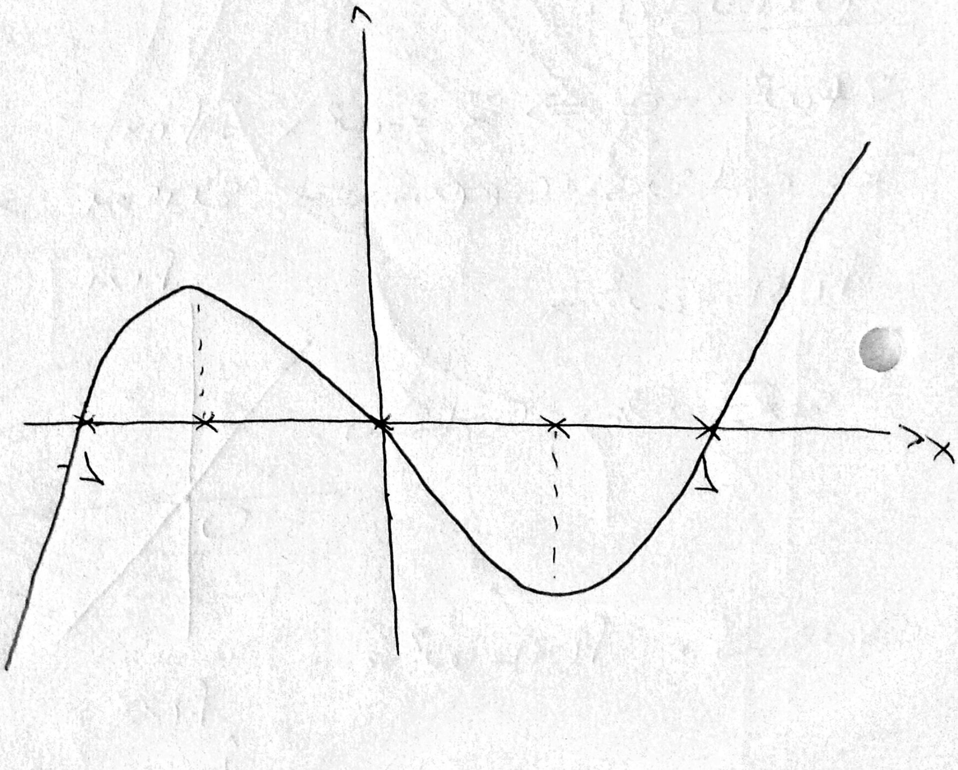
$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{ασταθές} \\ x = 0 & \text{ευσταθές} \\ x = 1 & \text{ασταθές} \end{cases}$$

Ευστάθεια:

$f(x) = x^3 - x$

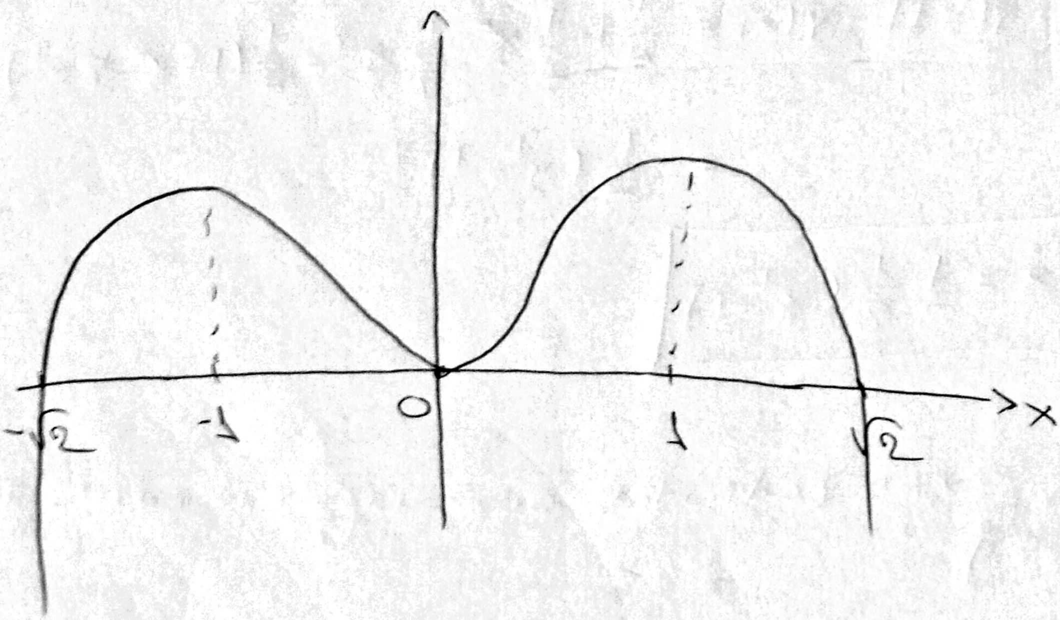
$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f''(x) = 6x$

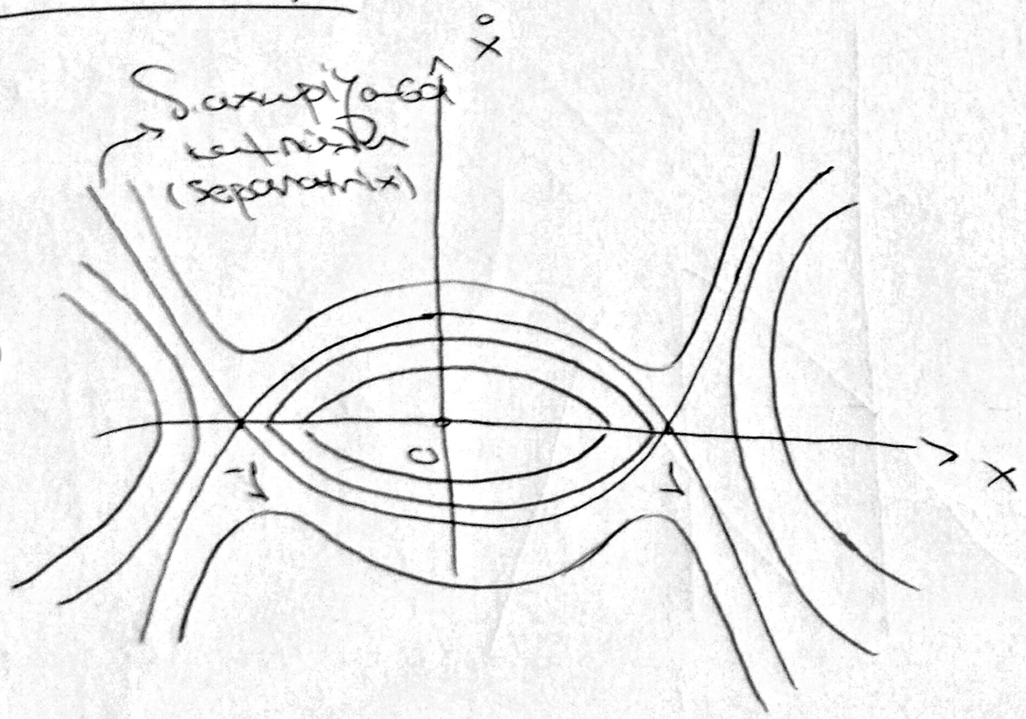


$$V(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - x^4)$$

$$V'(x) = \frac{1}{4}(4x - 4x^3) = (x - x^3)$$



Φασικός Χώρος:



Οι διαχωριστικές καμπύλες αντιστοιχούν:

$$(\dot{x})^2 = E - V(x), \quad E = V(x_0) \Rightarrow \begin{cases} E = V(0) = 0 \\ E = V(\pm 1) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Απάντηση

(α) $(\dot{x})^2 = V(0) - V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x^2-2)$

(β) $(\dot{x})^2 = V(x=1) - V(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}(1+x^4-2x^2)$

$$= \frac{1}{4}(x^2-1)^2$$

Άρα $\boxed{\dot{x} = \pm\frac{1}{2}(x^2-1)}$

(οι διαχωρίζουσες καμπύλες διαχωρίζουν το είδος της κίνησης)